

2015年度 微積分演習


著者	西村 泰一
発行年	2015
URL	http://hdl.handle.net/2241/00124457


'15. 7. 29


微積分演習 第14回


アルキメデス
座標 $x^2 + y^2 = a^2$ のような考えはなかった。

ユークリッド幾何 図形を図形として扱う

円  1点からの距離が等しい点の軌跡

楕円  2点からの距離の和が一定である点の軌跡

双曲線  2点からの距離の差が一定である点の軌跡

放物線  1点と直線の距離が等しい点の軌跡

円錐を平面で切、て現れる図形

円錐曲線



使うのは次の考え

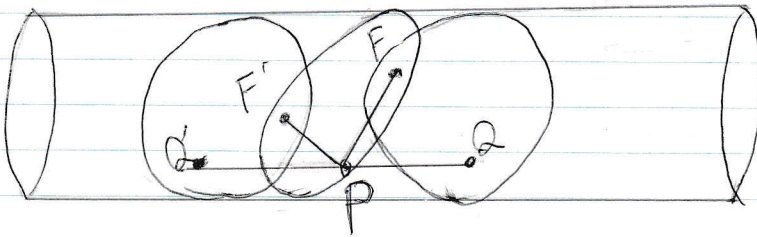


円に接線を引く
長さは同じ



球面に接線を引く
長さは同じ

円柱を平面で切る (楕円になる)



円柱に内接, 切断面に接する球を2つ考える
接点 F, F' とする.

切断面の周上に P をとる
 P から円柱に平行に直線を引き, 球との接点を Q, Q' とする.

$$PF = PQ$$

$$PF' = PQ'$$

$$PF + PF' = PQ + PQ' = QQ'$$

切断面は楕円である.

★円錐を切るときも同様の考え方

積分

線積分

空間 \mathbb{R}^3 $f(x)$ ベクトル場 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 曲線 $[0, a] \rightarrow \mathbb{R}^3$ σ

$$\int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt$$

パラメータは重要ではない

 $t \in [0, \frac{a}{2}] \rightarrow \sigma(2t)$

向きは重要

$$\int_a^b f \cdot dr = - \int_b^a f \cdot dr$$

面積分

流れの場合 水の流れ出る量

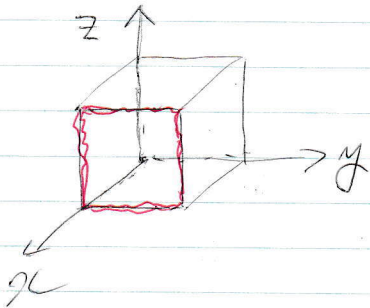
面の向きは重要



$$\int_r f \cdot dS = - \int_{-r} f \cdot dS$$

閉曲面のとき 外向きにとる.

$r = (x, y, z)$ 流れの場合



立方体 頂点 $(0,0,0)$ $(0,1,1)$
 $(0,1,0)$ $(1,0,1)$
 $(1,0,0)$ $(1,1,0)$
 $(0,0,1)$ $(1,1,1)$

どれだけ水が流れ出るか?

- ・面に垂直な成分が大事
- ・面に沿う成分は関係ない

赤い面は $1 \times 1 = 1$

$$[0,1] \times [0,1] \mapsto (1, s, t)$$

y 軸
 \downarrow
 s

z 軸
 \downarrow
 t

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

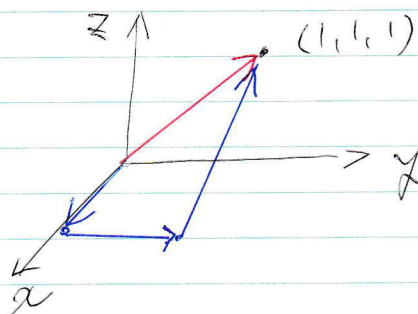
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1$$

e_2
 e_3

x 成分だけに+する

$$f = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \\ xz \end{pmatrix}$$

$$(0, 0, 0) \mapsto (1, 1, 1)$$



$$\int_0^1 f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt$$

(赤)

$$\sigma: t \in [0, 1] \mapsto (t, t, t)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 (t^2 + t + t^3) dt \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{13}{12} \end{aligned}$$

(青)

$$\sigma_1: t \in [0, 1] \mapsto (t, 0, 0)$$

$$\sigma_2: t \in [0, 1] \mapsto (1, t, 0)$$

$$\sigma_3: t \in [0, 1] \mapsto (1, 1, t)$$

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

足して、 $\frac{4}{3}$

道によつてちがう結果